

## KAPITEL 5

Design og test af neuralt netværk til bestemmelse af om andengradsligninger har reelle eller komplekse rødder (NN2\_X)

---

# KAPITEL 5

## 5. DESIGN OG TEST AF NEURALT NETVÆRK TIL BESTEMMELSE AF OM ANDENGRADSLIGNINGER HAR REELLE ELLER KOMPLEKSE RØDDER (NN2\_X)

### 5.1 Indledning

I dette kapitel skal det undersøges, om et neuralt netværk kan optrænes til at finde ud af, om en forelagt andengradsligning har reelle eller komplekse rødder. Denne opgave er mere velegnet til løsning ved hjælp af neurale netværk, da det ikke er matematisk præcision som der efterspørges, men derimod en slags "bedømmelse", der ønskes udført.

Til opgaven vælges:

Netværkstype:	Feedforward
Neuron-type:	Sigmoid-overføringsfunktion (hyperbolsk tangens-overføringsfunktion) med forstærkning 1
Netværksarkitektur:	Et input-lag, 2 skjulte lag og 1 output-lag
Antal input-neuroner:	3
Antal output-neuroner:	1
Antal neuroner i skjulte lag ved start:	6

Indlæringsalgoritme : Backpropagation of Error

### 5.2 Afgrænsninger

Der anvendes samme afgrænsninger for andengradsligningernes A-, B- og C-koefficienter, som i kapitel 4, altså:

$$0 < A < 10, \quad -10 < B < 10, \quad -10 < C < 10$$

### 5.3 Datarepræsentation

I bilag 2 er vist koden ANDENG1.C til generering af andengradsligningerne med reelle eller komplekse rødder. Data er lagret i en matrix med 150 rækker og 4 søjler, hvoraf de tre første søjler indeholder ligningernes A-, B- og C-koefficienter. Fjerde søjle rummer størrelsen R, som angiver om den pågældende ligning har reelle rødder (R=1) eller om den har komplekse rødder (R=0).

A	B	C	R
2	-5	1	1
9	3	2	0
.	.	.	.
.	.	.	.

etc.

Filen NN2\_1.DAT rummer matricen.

### 5.4 Bedømmelseskriterier

Ved test af netværket vil det blive betragtet som et "godt" trænet neuralt net, hvis det præsterer 75% til 85% rigtige, som et "meget godt" net, hvis 85% til 95% af svarene er rigtige, og som et "perfekt" trænet netværk, hvis 95% til 100% af svarene er rigtige.

Hvis netværks-output  $R > 0.5 \Rightarrow$  ligning med reelle rødder

Hvis netværks-output  $R < 0.5 \Rightarrow$  ligning med komplekse rødder

### 5.5 Opsætning og træning af netværk

Til denne opgave er valgt et netværk (NN2\_3) med to skjulte lag à 6 neuroner, der hver øges med én neuron, hvis RMS Error (Root Mean Squared Error) ikke forbedres 0.1 eller mere over 100 gennemløb. Årsagen til, at tommelfingerreglen som brugt i afsnit 4.5 ikke bruges her er, at et tidligere trænet netværk (NN2\_2) med to skjulte lag à 3 neuroner, ikke forbedres ved fortsat træning, men efter en vis tid bestandigt har mellem 25 og 31 datasæt, som netværket ikke kan løse korrekt.

Første netværk (NN2\_1), der blev trænet med dette datasæt, havde kun ét skjult lag med to neuroner, hvilket medførte, at netværket efter en vis træningstid til stadighed havde ca. 35 datasæt, som ikke kunne løses korrekt.

Træningstolerancen sættes til 0.15

og ved:	% rigtige svar	anvendes	Indlæringsraten
	0 %		1.0
	50 %		1.0
	75 %		0.9
	90 %		0.8

Det vælges at teste netværket for hvert 20. gennemløb med de til rådighed værende testdata (10% af de 150 trænings-facts bruges alene til test).

Netværket lagres på harddisken også efter hvert 20. gennemløb.

Efter endt træning er der blevet lagt tre neuroner til i hvert af de skjulte lag. Træningsprocessen stoppes efter 380 gennemløb, da forløbet virker fornuftigt. Netværket gentrænes med 5% støj tillagt input-data, for at få det til at generalisere bedre.

Netværket gentrænes under navnet: NN2\_4.

Træningen standses efter 1220 gennemløb, selvom netværket ikke er færdigtrænet, idet man er mest interesseret i at finde det netværk, som har de bedste resultater ved test.

Efter 480 iterationer er:

GOOD = 15

BAD = 0

AvgError = 0.0278

RMSError = 0.0707

$R^2$  : R = 0.9841

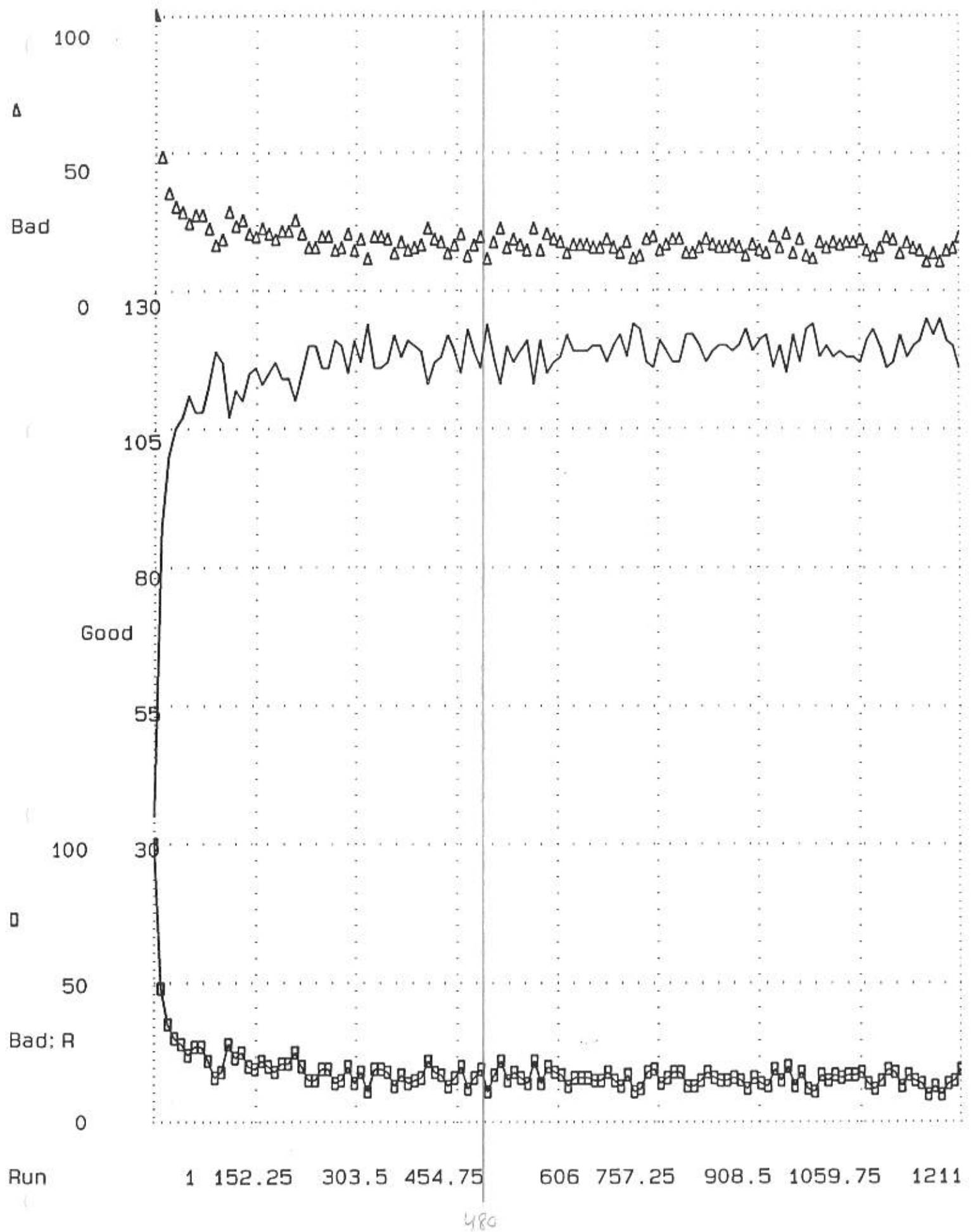
Bad R = 0

hvilket er de bedste testdata i træningsforløbet. Dette netværk (RUN00480.NET) har to skjulte lag med henholdsvis syv og seks neuroner.

Netværket findes på medfølgende diskette i directory A:\NN2\_4.

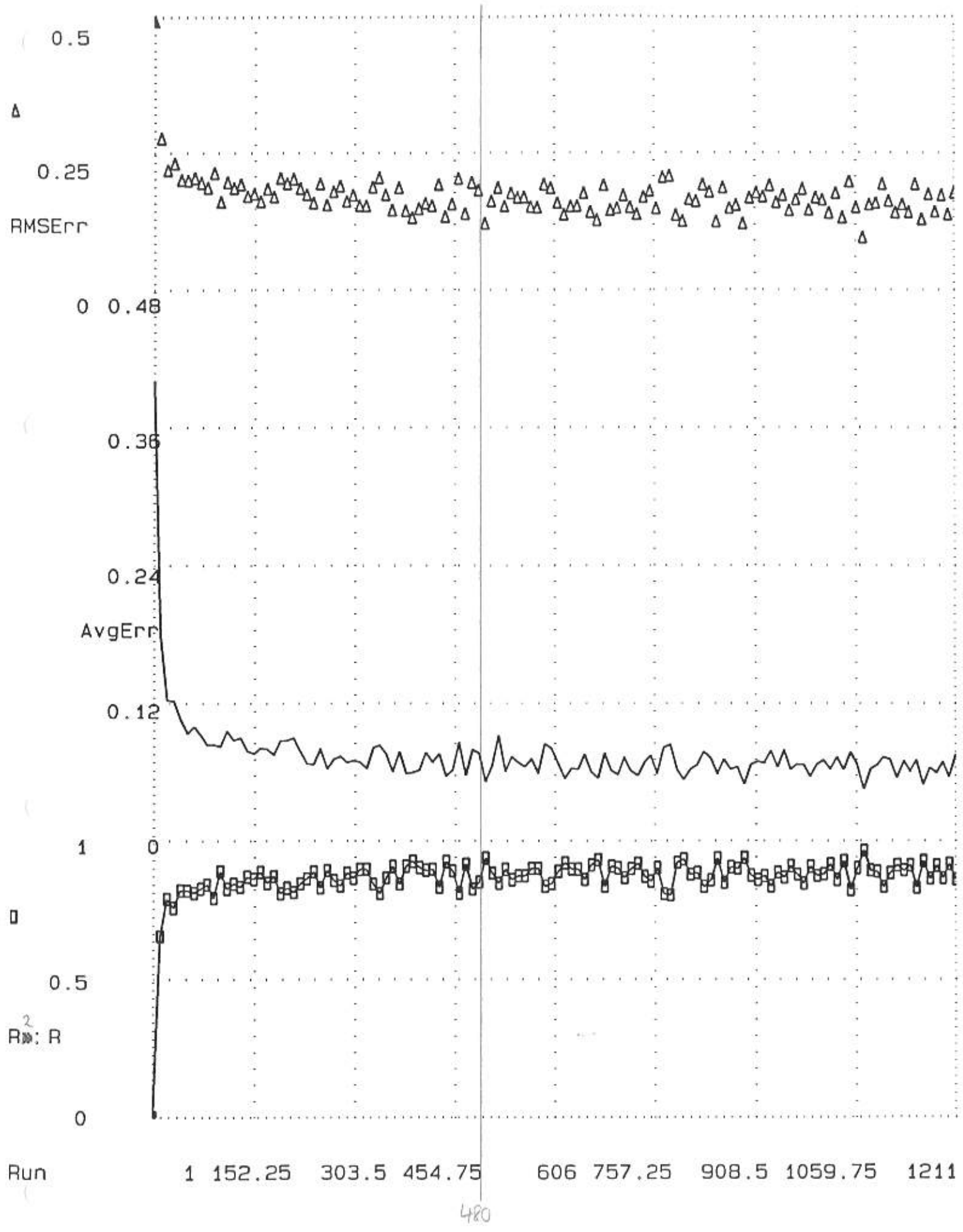
Nedenfor er vist nogle grafer med indhold fra NN2\_4.STS (Graf 5.1 & 5.2) og NN2\_4.STA (Graf 5.3 & 5.4).

Se eventuelt beskrivelse af grafter i kapitel 4.

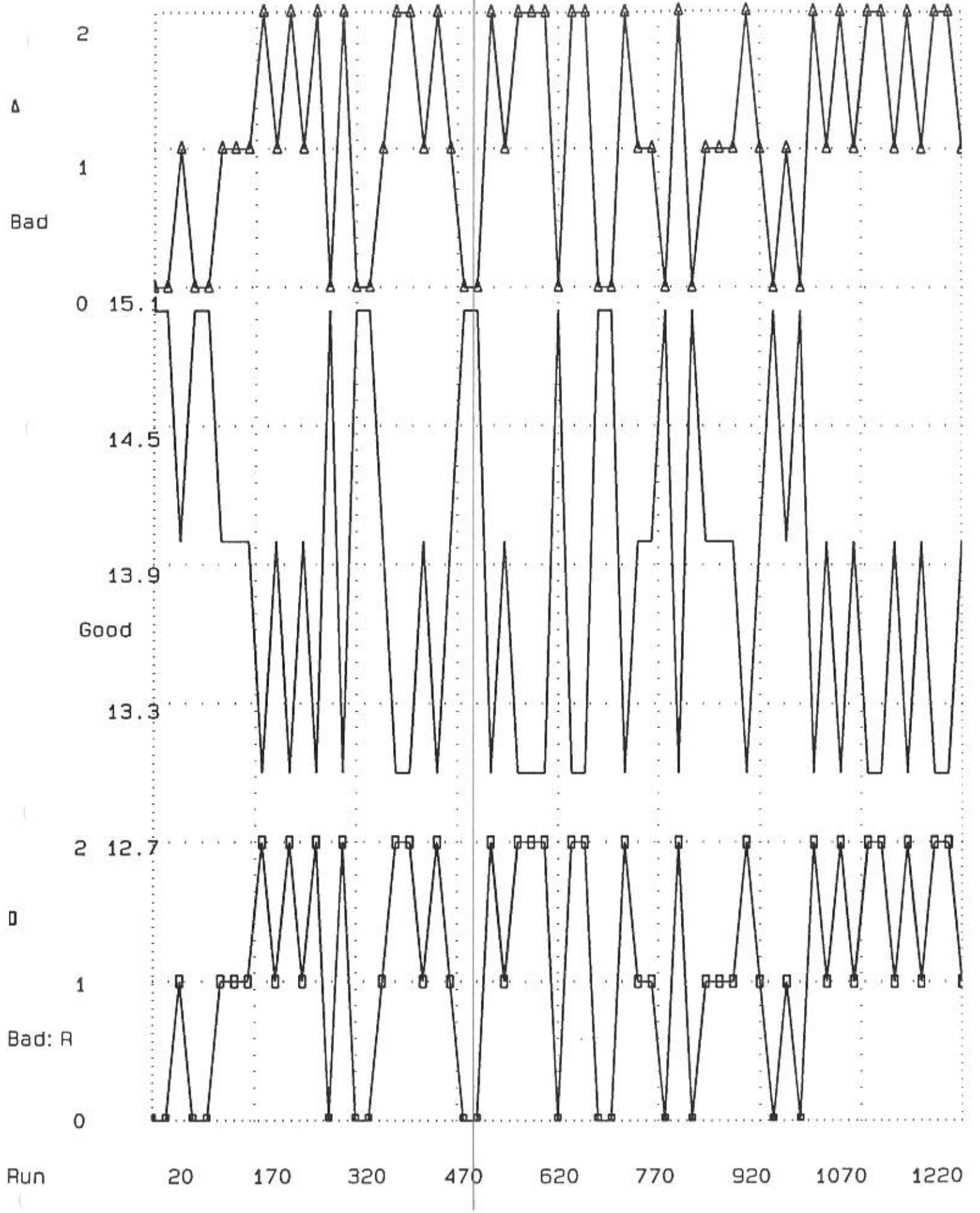


480

Graf 5.1 Netdata ved træning af NN2\_4 (NN2\_4.STS)



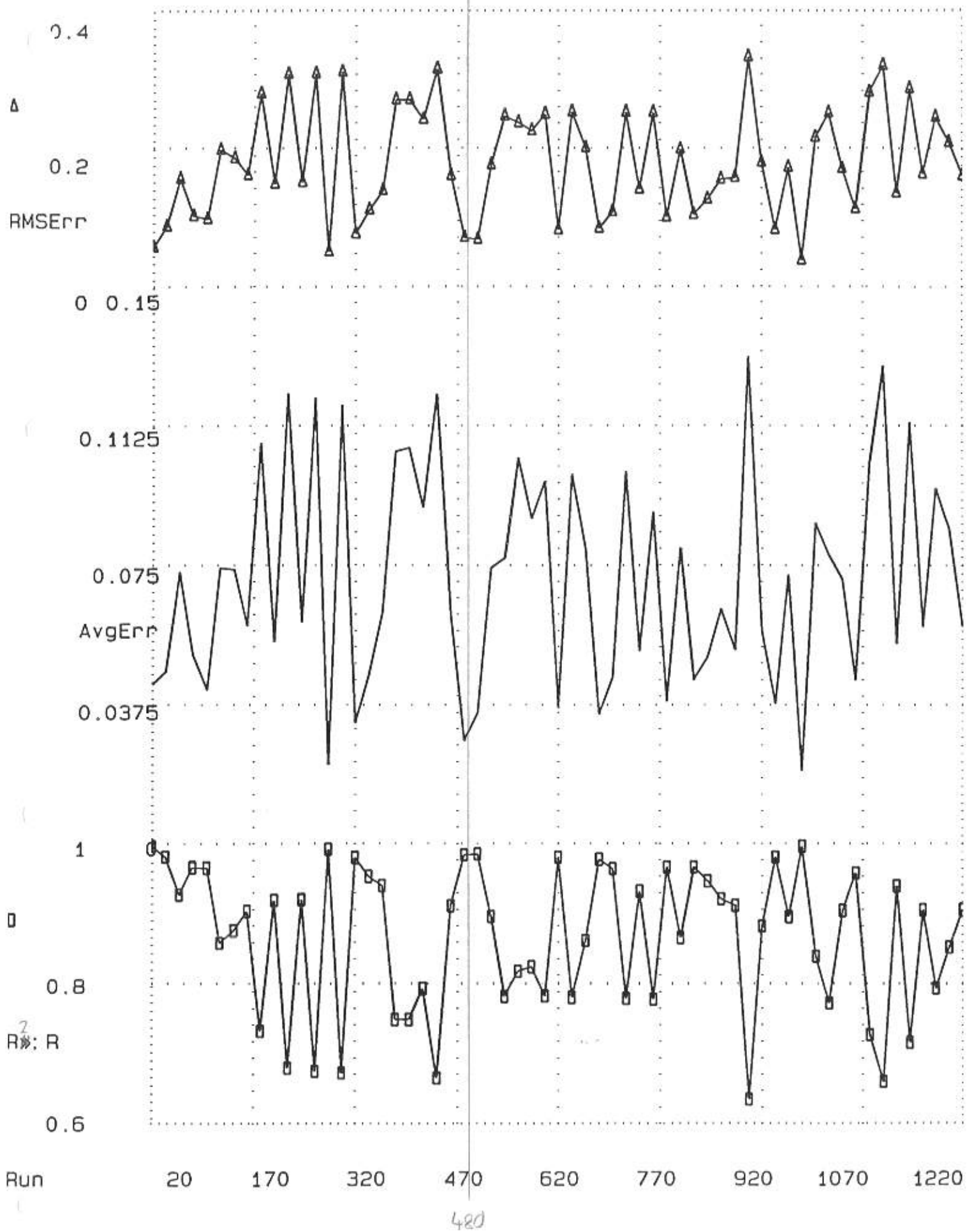
Graf 5.2 Netdata ved træning af NN2\_4 (NN2\_4.STS)



480

Graf 5.3 Netdata ved test under træning af NN2\_4 (NN2\_4.STA)





Graf 5.4 Netdata ved test under træning af NN2\_4 (NN2\_4.STA)

## 5.6 Netværksafprøvning

Nedenfor er vist resultatet af en kørsel med 150 nye tilfældige andengradsligninger (A, B og C) påtrykt det optrænedede netværk NN2\_4, (RUN00480.NET).

"<---- fejl" betyder i nedenstående at netværket har svaret forkert.

^A betyder kommentarlinie, d.v.s at netværket ikke har kendskab til indholdet på denne linie.

D = Beregnet diskriminant.

```

^A 0          <---- Matematisk resultat R
7.759 6.217 11.06 <---- Input (A, B og C ) D = -304.6
0.0099 <---- Netværks output R

^A 1
6.494 -7.56 -9.1          D = 293.5
0.9994

^A 1
5.035 7.267 -5.38        D = 161.2
0.9539

^A 1
8.051 -7.02 -1.33        D = 92.1
0.9906

^A 1
9.767 8.644 -8.98        D = 425.6
0.9957

^A 1
2.607 8.092 -1.19        D = 77.9
0.9359

^A 1
8.018 6.901 1.076        D = 13.1
0.7567

^A 1
0.765 -9.54 3.497        D = 80.3
0.9742

```

Design og test af neuralt netværk til bestemmelse af om andengradsligninger har reelle eller komplekse rødder (NN2 X)

---

$\hat{A} 1$			
7.269	1.115	-4.78	D = 140.2
0.9962			
$\hat{A} 0$			
3.934	1.408	1.715	D = -25.0
0.2982			
$\hat{A} 0$			
5.476	-2.72	0.812	D = -10.4
0.4857			
$\hat{A} 1$			
9.934	10.42	-5.39	D = 322.8
0.9779			
$\hat{A} 0$			
8.755	3.668	2.609	D = -77.9
0.2589			
$\hat{A} 1$			
9.57	1.437	-1.14	D = 45.7
0.9935			
$\hat{A} 1$			
8.381	-3.77	-5.92	D = 212.7
0.9989			
$\hat{A} 1$			
3.848	8.234	3.034	D = 21.1
0.7909			
$\hat{A} 0$			
6.175	4.923	6.759	D = -142.7
0.013			
$\hat{A} 1$			
1.903	-0.18	-8.97	D = 68.3
0.9952			
$\hat{A} 0$			
9.058	7.145	3.698	D = -82.9
0.0692			
$\hat{A} 0$			
6.953	7.785	5.348	D = -88.1
0.0445			
$\hat{A} 0$			
8.581	7.057	4.757	D = -113.5
0.0362			

Design og test af neuralt netværk til bestemmelse af om andengradsligninger har reelle eller komplekse rødder (NN2 X)

---

$\hat{A} 1$ 8.08 6.725 -4.41 0.9784	D = 187.8
$\hat{A} 1$ 1.286 5.993 -1.96 0.9456	D = 46.0
$\hat{A} 1$ 8.594 -5.43 -3.3 0.9981	D = 142.9
$\hat{A} 1$ 1.427 8.805 -6.75 0.9664	D = 116.1
$\hat{A} 1$ 8.35 -6.06 -9.53 0.9994	D = 335.0
$\hat{A} 0$ 7.992 -7.72 9.054 0.0135	D = -229.8
$\hat{A} 1$ 7.172 1.593 -0.21 0.94	D = 8.6
$\hat{A} 0$ 10.42 -10.5 8.468 0.0272	D = -242.7
$\hat{A} 1$ 9.765 7.746 -0.86 0.9188	D = 93.6
$\hat{A} 0$ 9.264 12.08 5.236 0.0311	D = -48.1
$\hat{A} 0$ 4.74 7.472 9.884 0.0103	D = -131.6
$\hat{A} 1$ 1.321 4.894 -6.79 0.9879	D = 59.8
$\hat{A} 0$ 9.332 -6.95 7.677 0.0179	D = -238.3

Design og test af neuralt netværk til bestemmelse af om andengradsligninger har reelle eller komplekse rødder (NN2\_X)

---

$\hat{A} 0$ 4.287 5.06 3.654 0.2762	D = -37.1
$\hat{A} 0$ 7.21 5.358 4.821 0.034	D = -110.3
$\hat{A} 1$ 2.246 6.53 0.778 0.8858	D = 35.7
$\hat{A} 0$ 7.808 7.262 5.675 0.0257	D = -124.5
$\hat{A} 0$ 5.006 2.409 8.937 0.0101	D = -172.2
$\hat{A} 0$ 3.235 -2.02 3.996 0.0272	D = -47.6
$\hat{A} 0$ 9.108 6.349 5.119 0.0262	D = -146.2
$\hat{A} 0$ 2.154 7.413 11.32 0.0101	D = -42.6
$\hat{A} 1$ 6.762 -4.09 -7.72 0.9991	D = 225.5
$\hat{A} 0$ 8.133 -0.38 5.358 0.013	D = -174.2
$\hat{A} 0$ 2.629 -2.09 6.701 0.0133	D = -66.1
$\hat{A} 0$ 7.933 1.061 7.345 0.0106	D = -232.0
$\hat{A} 1$ 6.298 -8.13 -0.58 0.9889	D = 80.7

$\hat{A} 1$ 4.164 9.108 0.426 0.9115		D = 75.9
$\hat{A} 1$ 1.134 -8.68 10.54 0.0118	<----- fejl	D = 27.5
$\hat{A} 0$ 8.616 9.328 3.038 0.1668		D = -17.7
$\hat{A} 1$ 9.616 2.194 -4.31 0.9977		D = 170.6
$\hat{A} 1$ 2.556 -6.12 2.287 0.6617		D = 14.1
$\hat{A} 1$ 9.146 -9.76 -8.74 0.9994		D = 415.0
$\hat{A} 1$ 6.874 7.902 -5.72 0.9657		D = 219.7
$\hat{A} 1$ 2.27 2.345 -8.05 0.9945		D = 78.6
$\hat{A} 1$ 4.674 -0.11 -6.42 0.9969		D = 120.0
$\hat{A} 0$ 7.399 6.93 2.999 0.3165		D = -40.7
$\hat{A} 0$ 2.176 4.049 9.484 0.0108		D = -66.2
$\hat{A} 1$ 1.668 5.333 -7.34 0.9862		D = 77.4
$\hat{A} 1$ 5.45 -6.32 -4.49 0.9979		D = 137.8

Design og test af neuralt netværk til bestemmelse af om andengradsligninger har reelle eller komplekse rødder (NN2\_X)

---

$\hat{A} 1$			
2.27	1.183	-9.5	D = 87.7
0.9957			
$\hat{A} 1$			
2.354	-8.43	-0.35	D = 74.4
0.9874			
$\hat{A} 0$			
4.164	-5.25	6.803	D = -85.8
0.0121			
$\hat{A} 1$			
4.305	8.346	-0.15	D = 72.2
0.9159			
$\hat{A} 1$			
2.048	5.353	-7.99	D = 94.1
0.9869			
$\hat{A} 1$			
4.637	-2.14	-1.69	D = 35.9
0.9271			
$\hat{A} 1$			
8.774	-9.27	1.964	D = 17.0
0.5755			
$\hat{A} 0$			
7.328	-2.45	2.916	D = -79.5
0.057			
$\hat{A} 1$			
0.521	5.377	-11.5	D = 52.9
0.9937			
$\hat{A} 1$			
5.909	8.83	-3.41	D = 158.6
0.9388			
$\hat{A} 1$			
9.51	-2.02	-7.73	D = 298.1
0.9989			
$\hat{A} 1$			
4.096	-1.5	-5.37	D = 90.2
0.9962			
$\hat{A} 0$			
2.18	4.738	7.081	D = -39.3
0.0172			

Design og test af neuralt netværk til bestemmelse af om andengradsligninger har reelle eller komplekse rødder (NN2 X)

---

^A 1 0.304 -9.98 5.143 0.9644		D = 93.4
^A 1 6.999 -7.22 -4.61 0.9986		D = 181.2
^A 0 1.007 3.976 8.414 0.014		D = -18.1
^A 1 6.175 -5.52 -9.97 0.9994		D = 276.7
^A 0 4.914 6.456 3.234 0.5553	<---- fejl	D = -21.9
^A 0 2.248 1.935 0.587 0.5665	<---- fejl	D = -1.5
^A 1 5.694 -9.64 2.321 0.9496		D = 40.1
^A 1 1.148 -11.7 8.751 0.379	<---- fejl	D = 96.7
^A 1 4.033 -10.2 -0.34 0.9937		D = 109.5
^A 0 4.294 -0.13 9.684 0.0099		D = -166.3
^A 1 7.456 -7.47 -8.08 0.9994		D = 296.8
^A 0 6.652 5.138 6.378 0.0145		D = -143.3
^A 1 10 -0.77 -9.24 0.9989		D = 370.2



Design og test af neuralt netværk til bestemmelse af om andengradsligninger har reelle eller komplekse rødder (NN2\_X)

---

$\hat{A} 1$				
2.363	10.5	-5.94		D = 166.4
0.9503				
$\hat{A} 0$				
2.136	3.956	3.327		D = -12.8
0.2235				
$\hat{A} 1$				
0.39	4.957	5.548		D = 15.9
0.066			<---- fejl	
$\hat{A} 0$				
2.974	-2.51	8.483		D = -94.6
0.0108				
$\hat{A} 0$				
2.38	4.391	10.64		D = -82.0
0.0101				
$\hat{A} 1$				
4.09	9.694	1.286		D = 72.9
0.9				
$\hat{A} 1$				
4.874	-10	-2.51		D = 148.9
0.9964				
$\hat{A} 1$				
2.251	5.91	0.309		D = 32.2
0.8878				
$\hat{A} 1$				
7.537	-1.39	-5.05		D = 154.2
0.9984				
$\hat{A} 0$				
7.619	-0.67	0.045		D = -0.9
0.9537			<---- fejl	
$\hat{A} 1$				
0.163	-8.89	2.985		D = 77.1
0.9757				
$\hat{A} 0$				
2.433	7.365	8.278		D = -26.3
0.0155				
$\hat{A} 0$				
6.915	-2.22	11.03		D = -300.2
0.0099				

Design og test af neuralt netværk til bestemmelse af om andengradsligninger har reelle eller komplekse rødder (NN2 X)

---

$\hat{A} 0$ 3.176 2.018 6.447 0.014			D = -77.8
$\hat{A} 0$ 4.169 -1.3 1.383 0.1937			D = -21.4
$\hat{A} 1$ 3.784 9.284 -6.98 0.9498			D = 191.8
$\hat{A} 1$ 5.105 -8.88 -2.46 0.9962			D = 129.1
$\hat{A} 0$ 9.328 -9.51 6.876 0.0274			D = -166.1
$\hat{A} 1$ 3.811 4.787 -3.41 0.9505			D = 74.9
$\hat{A} 0$ 9.018 -9.31 2.692 0.2562			D = -10.4
$\hat{A} 1$ 1.257 -7.6 -8.36 0.9942			D = 99.8
$\hat{A} 0$ 9.783 -4.98 7.287 0.0164			D = -260.4
$\hat{A} 1$ 9.458 0.905 -6.92 0.9986			D = 262.6
$\hat{A} 1$ 4.292 -8.88 -4.95 0.9969			D = 163.8
$\hat{A} 0$ 5.659 -5.05 2.081 0.2562			D = -21.6
$\hat{A} 1$ 8.311 2.453 -0.78 0.9767			D = 32.0

Design og test af neuralt netværk til bestemmelse af om andengradsligninger har reelle eller komplekse rødder (NN2 X)

---

$\hat{A} 1$				
6.885	-5.83	-9.11		D = 284.9
0.9994				
$\hat{A} 1$				
0.126	-8.27	-1.63		D = 69.2
0.9857				
$\hat{A} 1$				
2.516	-8.34	0.202		D = 67.5
0.9852				
$\hat{A} 0$				
2.424	2.208	2.716		D = -21.5
0.1593				
$\hat{A} 1$				
3.964	-0.74	-7.39		D = 117.7
0.9977				
$\hat{A} 1$				
3.244	9.186	1.53		D = 64.5
0.9022				
$\hat{A} 1$				
5.731	-6.01	-0.13		D = 39.1
0.9395				
$\hat{A} 0$				
0.853	1.261	2.457		D = -6.8
0.1639				
$\hat{A} 1$				
0.728	-5.6	1.393		D = 27.3
0.9322				
$\hat{A} 1$				
4.969	5.763	-3.04		D = 93.6
0.9464				
$\hat{A} 1$				
1.255	-6.04	4.523		D = 13.8
0.3753			<---- fejl	
$\hat{A} 1$				
1.17	-6.86	8.629		D = 6.7
0.0157			<---- fejl	
$\hat{A} 0$				
9.908	-5.59	0.978		D = -7.5
0.8531			<---- fejl	

Design og test af neuralt netværk til bestemmelse af om an-  
dengradsligninger har reelle eller komplekse rødder (NN2\_X)

---

^A 0 3.275 7.267 7.628 0.0179		D = -47.1
^A 1 8.803 9.142 2.169 0.3248	<---- fejl	D = 7.2
^A 1 2.154 -3.07 -5.99 0.993		D = 61.0
^A 1 1.693 -4.37 1.637 0.6234		D = 8.0
^A 1 8.796 1.076 -2.9 0.9964		D = 103.2
^A 0 2.385 -2.3 9.371 0.0103		D = -84.1
^A 1 4.083 8.292 -3.08 0.9393		D = 119.1
^A 0 2.415 -2.01 5.221 0.0206		D = -46.4
^A 0 8.113 -9.87 3.483 0.2376		D = -15.6
^A 0 5.316 3.307 3.258 0.1451		D = -58.3
^A 1 6.601 -9.52 -9.74 0.9991		D = 347.8
^A 1 3.674 -3.01 -1.85 0.9264		D = 36.3
^A 0 4.364 2.926 3.454 0.1024		D = -51.7

Design og test af neuralt netværk til bestemmelse af om an-  
dengradsligninger har reelle eller komplekse rødder (NN2 X)

---

$\hat{A} 0$ 1.466 -4.73 8.517 0.0125	D = -27.6
$\hat{A} 1$ 9.686 7.228 -2.52 0.9749	D = 149.9
$\hat{A} 1$ 9.412 -1.33 -8.63 0.9989	D = 326.7
$\hat{A} 0$ 9.937 4.542 2.252 0.3853	D = -68.9
$\hat{A} 1$ 1.853 5.392 -0.59 0.9078	D = 33.5
$\hat{A} 1$ 4.235 -9.08 2.609 0.9381	D = 38.3
$\hat{A} 1$ 9.473 1.647 -3.56 0.9974	D = 137.6
$\hat{A} 0$ 5.377 8.6 7.672 0.0182	D = -91.1
$\hat{A} 0$ 5.054 6.076 6.735 0.0167	D = -99.2
$\hat{A} 1$ 2.69 7.448 -5.77 0.9583	D = 117.6
$\hat{A} 1$ 8.864 4.093 -1.56 0.9815	D = 72.1
$\hat{A} 0$ 0.926 1.286 10.07 0.0108	D = -35.7

Ved denne kørsel af netværket med helt tilfældige talværdier for A, B og C-koefficienterne er der:

$10/150 \cdot 100 = 6,7 \%$  forkerte svar og altså

$140/150 \cdot 100 = 93,3 \%$  rigtige svar.

Det er også forsøgt at påtrykke netværket ligninger med større koefficient-intervaller for at se, om det derved bliver bedre eller dårligere til at løse opgaven. Af pladshensyn er disse kørsler ikke vist:

- 1) Med  $0 < A < 20$ ,  $-20 < B < 20$ ,  $-20 < C < 20$   
gav netværket 89 % rigtige svar.
- 2) Med  $0 < A < 100$ ,  $-100 < B < 100$ ,  $-100 < C < 100$   
opnåedes 71 % rigtige svar.
- 3) Med  $0 < A < 1000$ ,  $-1000 < \overset{B}{C} < 1000$ ,  $-1000 < C < 1000$   
var kun 43 % svar rigtige.

### 5.7 Konklusion

Med 93,3 % korrekte svar, kan det neurale netværk karakteriseres som "meget tilfredsstillende" til løsning af denne opgavetype. De gange netværket "gætter" forkert, kan det konstateres, at diskriminantens værdi ligger omkring nul, så det neurale net bliver "i tvivl" om, hvorvidt løsningen har reelle eller komplekse rødder. Ved forøgelse af koefficient-intervallerne præsterer netværket dårligere besvarelser.